

РАСЧЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРУБЧАТОЙ КОНСТРУКЦИИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ИЗ УПРУГО-ВЯЗКИХ СРЕД

CALCULATION MATHEMATICAL MODEL OF TUBULAR STRUCTURE WITH FILLER FROM ELASTIC-VISCOUS MEDIA

Zh. Otarbayev,

*doctor of technical sciences,
professor,*

Academician NRI,

student of Zh.S. Erzhanov;

S. Buganova,

*candidate of technical sciences,
Associate professor of IEC;*

Zh. Baigurin,

*doctor of technical sciences,
professor;*

Zh. Kozhayev,

PhD,

Associate professor,

*KazNITU named after K. Satpayev,
Republic of Kazakhstan.*

Stability of production in the array of rocks under its own weight and a uniform axial pressure being on viscoelastic foundations such as the Winkler and Pasternak. The basic provisions of the proposed mechanical-mathematical model for calculating the stability of underground workings were used.

Keywords: model, equilibrium equation, conjugation sites, elasto-viscous medium, boundary conditions, construction, characteristic equation.

С то лет — это уже история! Идет время, мы — ученики Жакана Сулейменовича, работающие в Национальной инженерной академии (ранее КазННТУ), уже сами успели обзавестись достойными званиями и достижениями, издать множество научных и учебно-методических работ, подготовить большое количество молодых специалистов для научной деятельности и производства. И чем старше мы становимся, тем больше понимаем, что результаты, полученные нами, в основном достигнуты благодаря мудрой и целенаправленной «научной школе» нашего Учителя.

Рассмотрим трубчатую конструкцию, толщиной h , равной толщине рыхленного массива, внутренним радиусом R , длиной L в условиях эксплуатации.

Условия равновесия элемента таких трубчатых конструкций приводят к следующим двум уравнениям [1]:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q + m, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \bar{P}, \quad (1)$$

где M — изгибающий момент, m — моментная нагрузка, отнесенная так же, как интенсивность распределенной нагрузки

Ж.О. Отарбаев,

*доктор технических наук,
профессор,*

академик НИА,

ученик Ж.С. Ержанова;

С.Н. Буганов,

*кандидат технических наук,
доцент МОК;*

Ж.Д. Байгурун,

*доктор технических наук,
профессор;*

Ж.Т. Кожаяев,

*доктор PhD,
доцент,*

*КазННТУ имени К.И. Сатпаева,
Республика Казахстан.*

Ключевые слова: модель, уравнение равновесия, участки сопряжения, упруго-вязкая среда, граничные условия, построение, характеристическое уравнение.

в плоскости zx континуума Коссера, Q — перерезывающие силы, $\bar{P}$ — сплошная нагрузка, которая складывается из активной нагрузки q_k по формам критической деформации поперечного сечения [2, 3]:

$$q_k = \lambda_k \frac{0,85E}{(1 - \nu^2)^4} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{5}{2}}, \quad \lambda_k = \left\{\frac{8}{3}; 2; \frac{4}{3}\right\} \quad (2)$$

$$\text{и реактивной нагрузки} \quad P_k = \pm kw, \quad \pm \eta \frac{dW}{dx}. \quad (3)$$

При этом, если за P_k возьмем модель Фойхта, то одномерное движение под действием активной силы:

$$P_k = kw + \eta \frac{dW}{dx}. \quad (4)$$

если за P_k возьмем модель Максвелла, то одномерное движение под действием активной силы:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dP_k}{dt} + \frac{1}{\eta} P_k, \quad w = w_k + w_c. \quad (5)$$

В формулах (4-5) k — коэффициент жесткости пружины, η — коэффициент вязкости демпфера, w_k — абсолютное перемещение вязкого элемента.

Тогда уравнение равновесия под действием статических нагрузок на отдельных участках сопряжения имеет вид:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{EJ} \frac{dw}{dx} + \frac{k}{EJ} W = \frac{q_k}{EJ} \sin \omega x, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{mn}{L}, \quad m = \{1; 2; 3; \dots\}.$$

Формула (6) представляет собой математическую модель выработки под действием статической нагрузки на отдельных участках в зависимости от отношения h/R и R/h , (рис. 1, 2).

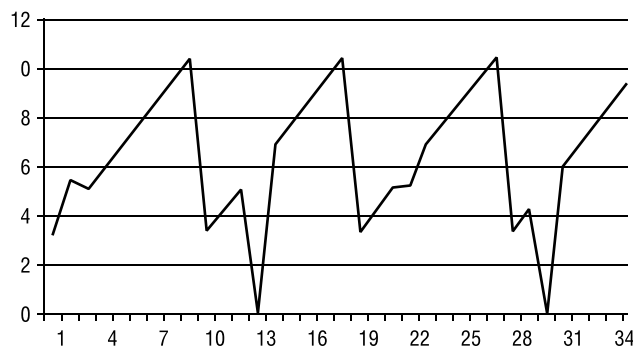


Рис. 1. Выпучивание выработки в зависимости от изменения отношения h/R .

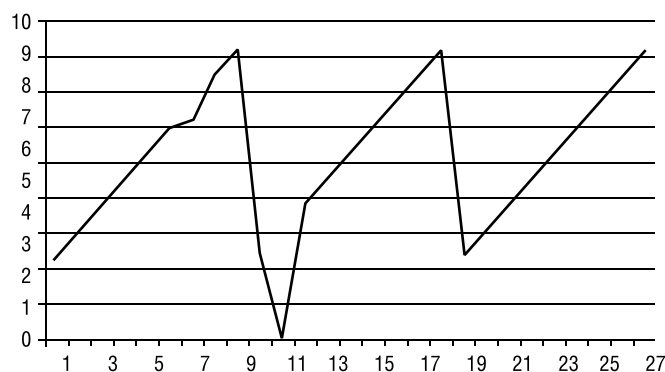


Рис. 2. Выпучивание выработки в зависимости от изменения отношения R/L .

Если J_{min} — наименьший радиус инерции поперечного сечения рыхленного массива и $\mu L = L_n$ приведенная длина рыхленного массива, L — длина, μ — коэффициент приведения длины, то выражение $\lambda = \mu L / J_{min}$ есть гибкость рыхленного массива, $\sigma_{крит} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пл} < \sigma_{крит} < \sigma_t$, $\lambda_{пред} = 100$; σ_t — предел текучести, $\sigma_{пл}$ — предел пластичности, $\lambda_{пред}$ — предельная гибкость, $\sigma_{пл}$ — предел пропорциональности материала.

Возможны варианты соответствия гибкости по формуле Ясинского, гиперболе Эйлера, параболе Эйлера.

В сложных сечениях, до и после места сопряжения неравномерных поперечных нагрузок, должны быть одинаковыми: линейные перемещения W ; изгибающие моменты $M = -MJ(d^2 W)/(dx^2)$ перерезывающие силы $Q = -MJ(d^3 W)/(dx^3)$.

Проведем анализ решения математической модели при граничных условиях, когда левый край свободный, а правый — скользяще-заделанный, т.е.:

$$\left. \frac{d^2 W}{dx^2} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{d^3 W}{dx^3} \right|_{x=0} = 0; \\ \left. W(x) \right|_{x=L} = 0; \quad \left. \frac{dW}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (7)$$

Общее решение (6) находим в виде

$$W(x) = W_0(x) + W_1(x) \quad (8)$$

где $W_0(x)$ — общее решение однородной части, $W_1(x)$ — какое-нибудь частное решение. Так как нахождения частного решения не представляет затруднений, найдем однородное решение, решая характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \frac{\eta}{EJ} \lambda + \frac{k}{EJ} = 0, \quad (9) \\ \text{или } \lambda^4 + a\lambda + b = 0, \quad a = \frac{\eta}{EJ}, \quad b = \frac{k}{EJ}.$$

Из постановки задачи $a > 0$, $b > 0$, тогда при решении уравнения (9) возможны варианты:

1. Два корня — действительные, отрицательные; два — комплексные;
2. Два корня — отрицательные, одинаковые; два — комплексные;
3. Все корни комплексные.

$$\lambda^4 + a\lambda + b = [\lambda^2 - A\lambda + \frac{1}{2}(A^2 + \frac{a}{A})][\lambda^2 + A\lambda + \frac{1}{2}(A^2 - \frac{a}{A})] = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } A^2 = \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{64b^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{64b^3}{27}}}. \quad (11)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{1}{2}(A^2 + \frac{a}{A})}, \quad A > 0; \quad (12)$$

$$k_{3,4} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}},$$

$$\text{Так как } \Delta_1 = \frac{A^2}{4} - \frac{1}{2}(A^2 + \frac{a}{A}) < 0, \text{ то } \lambda_{1,2} = \alpha_1 + \beta_1, \quad (13)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{A}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}}.$$

Итак, два корня комплексно-сопряженные.

Для нахождения двух других корней предположим:

А) Коэффициент вязкости больше коэффициента сопротивления, т.е. $\eta \gg k$, тогда

$$\lambda_{3,4} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A^2}{4}} < 0,$$

Общее решение однородной части дифференциального уравнения (6) имеет вид:

$$W_0(x) = e^{\lambda_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin(\beta_1 x) + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x}).$$

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-3:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{\eta}{EJ} \frac{dW}{dx} = \frac{q_k}{EJ} \sin \omega x, \quad (14)$$

при тех же граничных условиях с общим решением

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{bx} + e^{\frac{b}{2}x} (C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} bx + C_4 \sin [\frac{\sqrt{3}}{2} bx + \frac{q_k}{EJ} *]) \\ * \frac{\omega^4}{1 + \frac{\eta^2}{(EJ)^2}} \omega^6 (\sin \omega x - \frac{\eta}{EJ} \omega^3 \cos \omega x), \quad b = \sqrt[3]{\frac{\eta}{EJ}}. \quad (15)$$

В) Пусть коэффициент вязкости меньше коэффициента сопротивления, т.е. $\eta \ll k$, тогда

$$\lambda_{3,4} = \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_2 = \frac{A}{2}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{a}{2A} - \frac{A}{4}} > 0, \quad (16)$$

Общее решение однородной части дифференциального уравнения (6) имеет вид:

$$W_0(x) = e^{\alpha_2 x} (C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) + e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x).$$

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-2:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W = \frac{q_k}{EJ} \sin \omega x, \quad (17)$$

при тех же граничных условиях с общим решением:

$$W(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{q_k}{\omega^4 + \frac{k}{EJ}} \sin \omega x. \quad (18)$$

С) Пусть коэффициент вязкости равен коэффициенту сопротивления среды, т.е. $\eta = k$, тогда

$$k_3 = k_4 = -A/2 < 0. \quad (19)$$

Общее решение однородной части дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) имеет вид:

$$W_0(x) = e^{A/2x} (C_3 + C_4 x) + e^{\alpha_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x). \quad (20)$$

Следовательно, вместо дифференциального уравнения (6) при граничных условиях (7) можно рассмотреть дифференциальное уравнение модели Б-3:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{k}{EJ} W = \frac{q_k}{EJ} \sin \omega x, \quad (21)$$

при тех же граничных условиях с общим решением:

$$W(x) = C_1 + C_2 e^{-\beta x} + e^{\frac{b}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \beta x + C_4 \sin \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \beta x \right) + \frac{q_k}{EJ} \right] \right) * \frac{\omega^4}{1 + \frac{\eta^2}{D^2}} \omega^6 \left(\sin \omega x - \frac{\eta}{EJ} \omega^3 \cos \omega x \right), \quad b = \sqrt[3]{6(1-\nu)},$$

$$\frac{q_k}{D} = 10,2 \lambda_k \sqrt[4]{1-\nu^2} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left(\frac{R}{h} \right),$$

$$\frac{\eta}{D} = 6 \frac{1-\nu}{h^3}, \quad \frac{q_k}{\eta} = 1,7 \lambda_k \sqrt[4]{\frac{1+\nu}{(1-\nu)^2}} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \left(\frac{R}{h} \right).$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \eta = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (22)$$

Таким образом, выбор математической модели упруго-вязкой выработки во многом зависит от физико-механических свойств рыхленной зоны. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Божанов Е.Т., Ержанов Ж.С. Исследование проблем устойчивости упругих тел гибких пластин и оболочек и их приложения. Монография. - Алматы: Изд-во Высшая школа Казахстана, 2001. - 300 с.
2. Е.Т. Божанов, Ж.О. Отарбаев, С.Н. Буганова. Математическое моделирование геомеханических процессов. Монография. - Алматы: Изд-во «Строительство и архитектура», 2015. - 145 с.
3. Божанов Е.Т., Отарбаев Ж.О., Буганова С.Н. Расчет изменения кривизны рыхленного массива выработки под действием активной синусоидальной силы в зависимости от граничных условий на торцах. // Вестник НИА РК - 2012. - № 1(43), С. 55-60.



МЕЖДУНАРОДНЫЙ СОЮЗ МАШИНОСТРОИТЕЛЕЙ

Информируем Вас

В период 12-18 сентября 2022 г. в городе Севастополе (с проведением и проживанием в пансионате «Изумруд» в бухте Ласпи на Южном берегу Крыма) Международный союз машиностроителей, ДонНТУ, БГТУ, ЛНУ им. В. Даля и ряд университетов и организаций различных стран проводят XXIX международную научно-техническую конференцию: «МАШИНОСТРОЕНИЕ И ТЕХНОСФЕРА XXI ВЕКА».

Более детальная информация приведена на сайтах:
<http://konf-sev.donntu.org>, <http://iumb.donntu.org>, <http://tm.donntu.org>

WWW.GEOMAR-NADRA.RU