

Осесимметричная задача сдвижения массива линейно-деформируемых горных пород при подземной отработке

А. А. Григорьев✉, А. М. Григорьев, А. В. Зинченко, К. Б. Пономаренко
ОАО «ВНОГЕМ», лаборатория горного давления и сдвижения горных пород, г. Белгород,
Российская Федерация
✉ grand_982@mail.ru

Аннотация: Для прогнозной оценки последствий ведения подземных горных работ рассмотрены два варианта математических моделей сдвижения горных пород в осесимметричной постановке. Для однородного изотропного линейно-деформируемого массива интегральным преобразованием Ханкеля получены решения. На приведенных примерах показаны возможности моделирования: какие результаты могут быть получены и в какой форме они представлены. Показано изменение мульды оседания при развитии горных работ. Построены графики применяемых для контроля сдвижения оседаний, горизонтальных смещений и деформаций. Выполнена оценка влияния на результаты расчета изменения механических характеристик (коэффициента поперечного расширения) массива. Результаты исследований могут быть полезными при оценке вредного воздействия горных работ на наземные сооружения и природные объекты.

Ключевые слова: подземные горные работы, оседания, сдвижение горных пород, краевая задача, граничные условия, преобразование Ханкеля, горизонтальные смещения и деформации

Для цитирования: Григорьев А.А., Григорьев А.М., Зинченко А.В., Пономаренко К.Б. Осесимметричная задача сдвижения массива линейно-деформируемых горных пород при подземной отработке. *Маркшейдерия и недропользование*. 2025;25(5):21-25. <https://doi.org/10.56195/20793332-2025-25-5-21-25>.

The axisymmetric problem of the displacement massif a linear-deformable rock mass during the underground mining

A. A. Grigoryev✉, A. M. Grigoryev, A. V. Zinchenko, K. B. Ponomarenko
VIOGEM, laboratory of rock pressure and displacement rock mass, Belgorod, Russian Federation
✉ grand_982@mail.ru

Abstract: Two variants of mathematical models of rock displacement in an axisymmetric formulation are considered for the forecast assessment of the consequences of underground mining. For a homogeneous, isotropic, linearly deformable array, their solutions are obtained by the integral Hankel transformation. The given examples show the possibilities of modeling, what results can be obtained and in what form they are presented. The change of the subsidence trough during the development of mining operations is shown. Graphs of subsidence, horizontal displacements, and deformations used for the control of rock displacement are constructed. The effect of changes in the mechanical characteristics (coefficient of lateral expansion) of the array on the calculation results has been assessed. The research results may be useful in assessing the harmful impact of mining operations on surface structures and natural objects.

Keywords: underground mining, subsidence, displacement, boundary value problem, boundary conditions, Hankel transform, horizontal displacements and deformations

For citation: Grigoryev A.A., Grigoryev A.M., Zinchenko A.V., Ponomarenko K.B. The axisymmetric problem of the displacement massif a linear-deformable rock mass during the underground mining. *Mine Surveying and Subsurface Use*. 2025;25(5):21-25. (In Russ.). <https://doi.org/10.56195/20793332-2025-25-5-21-25>.

Введение

Проведение горных работ вызывает деформацию расположенных на подрабатываемых территориях зданий, сооружений и природных объектов, оказывая на них различное неблагоприятное воздействие. В зависимости от горно-геологических, горнотехнических условий эти деформации находятся в пределах от едва улавливаемых высокоточными инструментальными наблюдениями до вызывающих образования на земной поверхности видимых трещин и даже провалов (рис. 1).

Поэтому нахождение параметров сдвижения и совершенствование методов их прогноза является актуальной научной и практической задачей.



Рис. 1. Возможные последствия ведения подземных горных работ (фото из открытых источников) /

Fig. 1. Possible consequences of underground mining operations (photo from open sources)

Для ее решения в работах отечественных [1–5] и зарубежных [6–10] авторов использованы разные подходы, в том числе аналитические методы механики сплошных сред. В современных нормативных документах^{1, 2, 3} также предус-

¹ СНиП II-8-78. Здания и сооружения на подрабатываемых территориях. URL: <https://docs.cntd.ru/document/471806280>.

² СНиП II-8-78. Инструкция по наблюдениям за сдвижением горных пород и земной поверхности при подземной разработке рудных месторождений. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200029888>.

³ СНиП II-8-78. Временные правила охраны сооружений и природных объектов от вредного влияния подземных горных разработок месторождений руд цветных металлов с неизученным процессом сдвижения горных пород. URL: <https://www.normacs.ru/Doclist/doc/11FRQ.html>.

матривается предварительный (до проведения инструментальных наблюдений) прогноз величин деформаций земной поверхности первоначально с использованием модели линейно-упругого поведения.

В связи с этим рассмотрение возможных подходов к моделированию сдвижения массива горных пород при наиболее общих предположениях представляет научную и практическую значимость.

Цель исследований: оценка параметров сдвижения (оседаний, горизонтальных смещений и деформаций) и их развитие при ведении горных работ или водопонижении.

Методы исследований. Аналитические методы механики деформируемого твердого тела.

Результаты исследований

В работах [11, 12] были рассмотрены задачи в плоской и пространственной постановке. Рассмотрим осесимметричную задачу, решение которой может быть полезно при отработке изометрических в плане залежей или в большей степени при снижении напоров в пласте при его осушении.

Постановка и решение задач

В массиве однородных и изотропных линейно-деформируемых горных пород на глубине H в результате проведения очистных работ создано выработанное пространство, имеющее в плане вид круга радиусом R и эффективной вынимаемой мощностью m (рис. 2). Требуется определить сдвижение налегающей толщи пород, то есть компоненты дополнительных перемещений подработанной толщи горных пород (перекрывающего слоя) вследствие создания выработанного пространства.

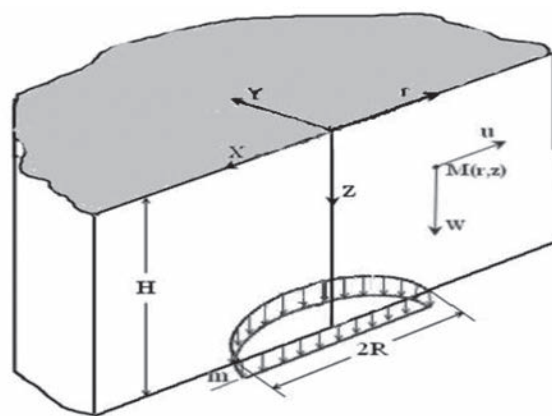


Рис. 2. Расчетная схема /
Fig. 2. Calculation scheme

Для решения поставленной задачи запишем уравнения равновесия в перемещениях (уравнения Ламе)

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

$$\theta = \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \text{ – объемная деформация;}$$

ν – коэффициент Пуассона пород слоя.

На контакте перекрывающей толщи с пластом (нижней границе слоя) граничные условия задаются в виде:

– экспериментально измеренного распределения оседаний кровли пласта

$$w = m(r) \text{ при } z = H, 0 \leq r < \infty, \quad (3)$$

которые для предварительного прогноза принимаются в виде

$$m(r) = \begin{cases} m, & \text{при } 0 \leq r \leq R; \\ 0, & \text{при } r > R \end{cases}; \quad (4)$$

– условия полного сцепления пород перекрывающей толщи с породами пласта (вариант 1)

$$u(r) = 0 \text{ при } z = H, 0 \leq r < \infty, \quad (5)$$

или, наоборот, их свободного проскальзывания (вариант 2)

$$\tau_{rz}(r; z) = 0 \text{ при } z = H, 0 \leq r < \infty. \quad (6)$$

Граничные условия на земной поверхности (верхней границе слоя) сводятся к отсутствию на ней нормальных и касательных напряжений, то есть

$$\sigma_{zz} = \tau_{rz} = 0 \text{ при } z = 0, 0 \leq r < \infty. \quad (7)$$

Таким образом, получаем смешанную задачу теории упругости для бесконечного (в горизонтальном направлении) слоя мощностью H .

Если ввести функцию напряжений $\Phi(r; z)$, через которую перемещения выражаются соотношениями

$$u = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad (8)$$

$$w = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \Phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (9)$$

то задача сводится к решению бигармонического уравнения в цилиндрических координатах

$$\nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \Phi(r, z) = 0, \quad (10)$$

которое получается при подстановке (8), (9) в уравнение равновесия (2), поскольку уравнение (1) при этом удовлетворяется тождественно.

Для решения задачи использовано интегральное преобразование Ханкеля, которое для функции напряжений $\Phi(r; z)$ определяется соотношением

$$\overline{\Phi(\xi, z)} = \int_0^\infty \Phi(r, z) J_0(\xi r) r dr, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad (11)$$

где $J_0(\xi r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, и обратным преобразованием (формулой обращения Ханкеля)

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \overline{\Phi(\xi, z)} J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (12)$$

Выполняя преобразование Ханкеля бигармонического уравнения (10) и интегрируя по частям, получим, что трансформанта $\overline{\Phi(\xi, z)}$ функции напряжений $\Phi(r; z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\frac{d^4 \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz^2} + \xi^4 \overline{\Phi(\xi, z)} = 0. \quad (13)$$

Граничные условия (3) – (7) примут вид на верхней границе слоя при $z = 0$

$$\left[\nu \frac{d^2 \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz^2} + (1-\nu) \xi^2 \overline{\Phi(\xi, z)} \right]_{z=0} = 0, \quad (14)$$

$$\left[(1-\nu) \frac{d^3 \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz^3} - (2-\nu) \xi^2 \frac{d \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz} \right]_{z=0} = 0, \quad (15)$$

а на нижней границе (при $z = H$)

$$\left[(1-2\nu) \frac{d^2 \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz^2} - 2(1-\nu) \xi^2 \overline{\Phi(\xi, z)} \right]_{z=H} = \overline{m(\xi)}, \quad (16)$$

условие полного сцепления

$$\left. \frac{d \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz} \right|_{z=H} = 0 \quad (17)$$

или проскальзывания

$$\left[\nu \frac{d^2 \overline{\Phi(\xi, z)}}{dz^2} + (1-\nu) \xi^2 \overline{\Phi(\xi, z)} \right]_{z=H} = 0. \quad (18)$$

Таким образом, получаем два варианта краевых задач.

В случае простейшей формы (4) распределения оседаний по почве слоя

$$\overline{m(\xi)} = \int_0^\infty m(r) J_0(\xi r) r dr = \int_0^R m J_0(\xi r) r dr = \frac{m R J_1(\xi R)}{\xi}, \quad (19)$$

и, опуская промежуточные выкладки, решение для полного сцепления пород перекрывающей толщи с породами отрабатываемого пласта (вариант 1) приводится к виду

$$u(r, z) = m \int_0^\infty \left\{ \frac{(1-2\nu) [2(1-\nu) ch\xi H + \xi H sh\xi H] - [(1-2\nu) sh\xi H + \xi H ch\xi H] \xi z}{(3-4\nu) sh^2(\xi H) + \xi^2 H^2 + 4(1-\nu)^2} sh\xi z - \right. \\ \left. - \frac{2(1-\nu) [(1-2\nu) sh\xi H + \xi H ch\xi H] - [2(1-\nu) ch\xi H + \xi H sh\xi H] \xi z}{(3-4\nu) sh^2(\xi H) + \xi^2 H^2 + 4(1-\nu)^2} ch\xi z \right\} R J_1(\xi R) J_1(\xi r) d\xi. \quad (20)$$

$$w(r, z) = m \int_0^\infty \left\{ \frac{(1-2\nu)[(1-2\nu)sh\xi H + \xi Hch\xi H] + [\xi Hsh\xi H + 2(1-\nu)ch\xi H]\xi z}{(3-4\nu)sh^2(\xi H) + \xi^2 H^2 + 4(1-\nu)^2} sh\xi z + \right. \\ \left. + \frac{2(1-\nu)[\xi Hsh\xi H + 2(1-\nu)ch\xi H] + [(1-2\nu)sh\xi H + \xi Hch\xi H]\xi z}{(3-4\nu)sh^2(\xi H) + \xi^2 H^2 + 4(1-\nu)^2} ch\xi z \right\} RJ_1(\xi R) J_0(\xi r) d\xi \quad (21)$$

В случае проскальзывания почвы перекрывающего слоя по кровле отрабатываемого пласта решение будет иметь вид (вариант 2)

$$u(r, z) = m \int_0^\infty \left\{ \frac{(1-2\nu)[sh\xi H + \xi Hch\xi H] - [\xi Hsh\xi H]\xi z}{(1-\nu)[sh(2\xi H) + 2\xi H]} sh\xi z - \right. \\ \left. - \frac{2(1-\nu)[\xi Hsh\xi H] - [sh\xi H + \xi Hch\xi H]\xi z}{(1-\nu)[sh(2\xi H) + 2\xi H]} ch\xi z \right\} RJ_1(\xi R) J_1(\xi r) d\xi \quad (22)$$

$$w(r, z) = m \int_0^\infty \left\{ -\frac{(1-2\nu)[\xi Hsh\xi H] + [sh\xi H + \xi Hch\xi H]\xi z}{(1-\nu)[sh(2\xi H) + 2\xi H]} sh\xi z + \right. \\ \left. + \frac{2(1-\nu)[sh\xi H + \xi Hch\xi H] + [\xi Hsh\xi H]\xi z}{(1-\nu)[sh(2\xi H) + 2\xi H]} ch\xi z \right\} RJ_1(\xi R) J_0(\xi r) d\xi \quad (23)$$

Примеры расчетов

Результаты расчетов оседаний земной поверхности η и ее радиальных смещений ξ , которые непосредственно измеряются при маркшейдерских наблюдениях, показаны на рисунках 3 и 4 (см. цв. вклейку на стр. 35), при $H = 400$ м; $R = 100, 200, 300, 400$ м; $\nu = 0,25$ в долях эффективной мощности m .

Из особенностей полученных кривых можно отметить, что их вид инвариантен относительно масштаба, то есть зависит только от соотношения R и H . При проскальзывании почвы перекрывающего слоя по кровле отрабатываемого пласта (2-й вариант) оседания η и горизонтальные смещения ξ не зависят от деформационных свойств налегающей толщи (коэффициента поперечного расширения ν).

В случае сцепления (1-й вариант) изменение кривых при $R = H = 400$ показано на рисунке 5 (см. цв. вклейку на стр. 36). Также можно отметить, что в случае проскальзывания (2-й вариант) величины смещений больше, чем при сцеплении.

Для оценки интенсивности техногенного воздействия горных работ на природные объекты, здания, сооружения и объекты инженерной инфраструктуры большое значение имеет прогноз горизонтальных деформаций, приведенный на рисунке 6 (см. цв. вклейку на стр. 36).

При оценке сдвижений и деформаций земной поверхности под влиянием водопонижения и дренажных работ следует иметь в виду, что процесс водопонижения носит временной характер, может развиваться на протяжении нескольких лет и связан с календарным графиком его проведения. Величины R при этом достаточно большие.

Результаты расчетов показаны на рисунках 7 и 8 (см. цв. вклейку на стр. 37).

При необходимости могут быть вычислены наклоны и кривизна.

Заключение

1. Полученные аналитические решения позволяют оценить параметры сдвижения при осевой симметрии задачи, которая выполняется при разработке изометрических в пла-

не залежей или в большей степени при снижении напоров в пласте при его осушении.

2. Полученные решения и графики позволяют рассчитывать вертикальные и горизонтальные компоненты смещений горных пород и все виды деформаций массива в зоне прогиба пород без разрыва сплошности (в «упругой» зоне) и особенно удобны, если горные работы проводятся с полной закладкой выработанного пространства, когда зона беспорядочного обрушения и зона разломов и крупных трещин, как правило, отсутствуют. Входящая в расчетные соотношения величина эффективной мощности m определяется свойствами закладки или пород осушаемого пласта и вычисляется на основе экспериментов (например, для условий Яковлевского ГОКа m составляет около 5 % выемочной мощности).

3. Для оценки отклонения свойств реального породного массива от идеализированных свойств, принимаемых при расчете, целесообразно использовать интервальные оценки для изучения влияния каждого из параметров.

4. Таким образом, приведенный экспериментально-аналитический подход к прогнозу и описанию процесса сдвижения позволяет обеспечить геомеханический мониторинг разработки месторождений: выполнять необходимые варианты расчеты и принимать оптимальные решения по проектированию подземных сооружений и ведению горных работ; формулировать требования к инструментальному контролю и проводить обратные расчеты при наличии натуральных измерений.

Выводы

1. В статье приведены результаты математического моделирования сдвижения при ведении горных работ или водопонижении. Полученные соотношения и их графики позволяют прогнозировать оседания, горизонтальные смещения, деформации и их изменения еще на стадии планирования горных работ.

2. Результаты исследований могут быть полезными при проектировании и разработке месторождений для оценки вредного воздействия горных работ на наземные сооружения и природные объекты и разработке необходимых мер по обеспечению их безопасности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Бахурин И.М. Сдвижение горных пород под влиянием горных разработок. Ленинград – Москва, 1946: 231.
Bakhurin I.M. Displacement of rocks under the influence of mining operations. Leningrad – Moscow, 1946: 231. (In Russ.).
2. Авершин С.Г. Сдвижение горных пород при подземных разработках. Москва, 1947: 245.
Avershin S.G. Displacement of rocks during underground mining. Moscow, 1947: 245. (In Russ.).
3. Сдвижение горных пород и земной поверхности при подземных разработках; под общ. ред. В.А. Букринского, Г.В. Орлова. Москва, 1984: 241.
Displacement of rocks and the earth's surface during underground mining; edited by V.A. Bukrinsky, G.V. Orlov. Moscow, 1984: 241. (In Russ.).
4. Кузнецов М.А., Акимов Л.Г., Кузьмин В.И. и др. Сдвижение горных пород на рудных месторождениях. Москва, 1979: 226.
Kuznetsov M.A., Akimov L.G., Kuzmin V.I., et al. Displacement of rocks at ore deposits. Moscow, 1979: 226. (In Russ.).
5. Викторов С.Д., Гончаров С.А., Иофис М.А. и др. Механика сдвижения и разрушения горных пород. Москва, 2019: 360.
Viktorov S.D., Goncharov S.A., Iofis M.A., et al. Mechanics of rock displacement and fracture; ed. by academician K.N. Trubetskoy. Moscow, 2019: 360. (In Russ.).
6. Будрык В., Литвинишин Е., Кнотте С. и др. Вопросы расчета сдвижений поверхности под влиянием горных разработок. Москва, 1956: 65.
Budryk V., Litvinishin E., Knotte S., et al. Issues of calculating surface displacements under the influence of mining operations. Moscow, 1956: 65. (In Russ.).
7. Kratzsch H. Mining Subsidence Engineering. Berlin, 1983: 551.
8. Brady B.H.G., Brown E.T. Rock Mechanics for underground mining. 3rd Ed. Berlin, 2005: 628.
9. Cui Z. Land Subsidence Induced by the Engineering-Environmental Effect. Berlin, 2018: 234.
10. Surface Subsidence Engineering: Theory and Practice. Edited by Syd S. Peng. Boca Raton, 2020: 216.
11. Григорьев А.А., Григорьев А.М. Моделирование сдвижения массива горных пород как линейно-деформируемой среды. *Вектор ГеоНаук*. 2020; 3 (3): 19-26.
Grigoriev A.A., Grigoriev A.M. Modeling of rock mass displacement as a linearly deformable medium. *Vector GeoSciences*. 2020; 3 (3): 19-26. (In Russ.). <https://doi.org/10.24411/2619-0761-2020-10027>.
12. Григорьев А.А., Григорьев А. М. Математическое моделирование сдвижения горных пород при подземной разработке месторождений горизонтальными выработками. *Вектор ГеоНаук*. 2024; 7 (2): 45-56.
Grigoriev A.A., Grigoriev A.M. Mathematical modeling of rock displacement during underground mining of deposits by horizontal workings. *Vector GeoSciences*. 2024; 7 (2): 45-56. (In Russ.). <https://doi.org/10.24412/2619-0761-2024-2-45-56>.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Андрей Александрович Григорьев –

младший научный сотрудник лаборатории горного давления и сдвижения горных пород ОАО «ВЮГЕМ», 308007, г. Белгород, Российская Федерация;
e-mail: grand_982@mail.ru

Александр Михайлович Григорьев –

кандидат технических наук, доцент, консультант лаборатории горного давления и сдвижения горных пород ОАО «ВЮГЕМ», 308007, г. Белгород, Российская Федерация

Алексей Владимирович Зинченко –

кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории горного давления и сдвижения горных пород ОАО «ВЮГЕМ», 308007, г. Белгород, Российская Федерация

Константин Борисович Пономаренко –

младший научный сотрудник лаборатории горного давления и сдвижения горных пород ОАО «ВЮГЕМ», 308007, г. Белгород, Российская Федерация

Критерии авторства:

авторы внесли равный вклад при подготовке статьи.
Конфликт интересов: конфликт интересов отсутствует.

Информация о статье

Поступила в редакцию: 22.07.2025
Поступила после рецензирования: 09.09.2025
Принята к публикации: 23.09.2025

ABOUT THE AUTHORS

Andrey A. Grigoryev –

Research Fellow of Laboratory of Rock Pressure and Displacement Rock Mass, VIOGEM, 308007, Belgorod, Russian Federation; e-mail: grand_982@mail.ru

Aleksandr M. Grigoryev –

Cand. Sci. (Eng.), Docent, Consultant of Laboratory of Rock Pressure and Displacement Rock Mass, VIOGEM, 308007, Belgorod, Russian Federation

Alexey V. Zinchenko –

Cand. Sci. (Eng.), Senior Scientist of Laboratory of Rock Pressure and Displacement Rock Mass, VIOGEM, 308007, Belgorod, Russian Federation

Konstantin B. Ponomarenko –

Research Fellow of Laboratory of Rock Pressure and Displacement Rock Mass, VIOGEM, 308007, Belgorod, Russian Federation

Contribution:

The authors have made an equal contribution to the preparation of the article. Conflict of interest: There is no conflict of interest.

Article info

Received: 22.07.2025
Revised: 09.09.2025
Accepted: 23.09.2025