

Механико-математическая модель расчета деформированного состояния кровли камер подземного скважинного выщелачивания урана

Е. С. Орынгожин^{1,2}, Р. А. Юсубалиев³, М. К. Жексенов⁴,

Е. Е. Орынгожа⁵✉, Н. А. Милетенко⁶

¹Институт горного дела имени Д. А. Кунаева, г. Алматы, Республика Казахстан

²Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан

³Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Республика Казахстан

⁴Атырауский университет имени Х. Досмухамедова, г. Атырау, Республика Казахстан

⁵Алматинский университет энергетики и связи имени Г. Даукеева, г. Алматы, Республика Казахстан

⁶ФГБУН «Институт проблем комплексного освоения недр имени академика Мельникова» Российской академии наук (ИПКОН РАН), г. Москва, Российская Федерация

✉ e24.01@mail.ru

Резюме. Уран является одним из видов топлива для ядерной энергетики и рассматривается как стратегический материал для военных целей и обеспечения энергетической независимости страны. Традиционный способ добычи заключается в извлечении руды из недр, ее дроблении и обработке для получения искоемых минералов. В технологии подземного скважинного выщелачивания (ПСВ), также известного как добыча растворением, руда остается на месте залегания, и через нее прокачиваются жидкости для выщелачивания минералов.

В статье дана механико-математическая модель расчета деформированного состояния кровли камер ПСВ урана. При подземной разработке полезных ископаемых методом ПСВ размываемый массив горных пород испытывает комплекс переменных напряжений и деформаций, приводящих к сдвигению и разрушению пород. Образование камер ПСВ при размыве массива осадочных пород приводит к нарушению исходного напряженного состояния массива, деформации пород и обрушению кровли камер. Состояние горного массива во многом зависит от применяемых систем ПСВ. Очистные камеры ПСВ обрабатываются секторами вокруг добычной скважины. Отработка секторов ведется гидроразрывом рабочей жидкости горных пород с углами раскрытия $\alpha_{\min} \Rightarrow \alpha_{\max}$ при радиусах размыва $R_{\min} \Rightarrow R_{\max}$ в зависимости от физико-механических свойств пород и устойчивости обнаженной кровли.

Ключевые слова: подземное скважинное выщелачивание, уран, механико-математическая модель, деформированное состояние, кровли камер, напряжение, разрушение пород

Для цитирования: Орынгожин Е.С., Юсубалиев Р.А., Жексенов М.К., Орынгожа Е.Е., Милетенко Н.А. Механико-математическая модель расчета деформированного состояния кровли камер подземного скважинного выщелачивания урана. *Маркшейдерия и недропользование*. 2026; 26 (3): 62-67. <https://doi.org/10.56195/20793332-2026-26-3-62-67>.

Ye. Ye. Oryngozha⁵✉, N. A. Miletenko⁶

ning after D.A. Kunaeva, Almaty, Republic

²*Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan*

Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Republic of

⁴*Atyrau university named after H. Dosmukhamedova, Atyrau, Republic of Kazakhstan*

Daukeev Almaty University of Energy and Communications, Almaty, Republic of Kazak

Acian Melnikov Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources - IPKON, Russian A

✉ *e24.01@mail.ru*

This article presents a mechanical and mathematical model for calculating the deformation state of the roof of uranium ISL cham-

Keywords: In-situ leaching, uranium, mechanical-mathematical model, deformed state, chamber roofs, stress, rock failure

For citation: Oryngozhin Ye.S., Yusubaliev R.A., Jexenov M.K., Oryngozha Ye.Ye., Miletenko N.A. A mechanical-mather

ЧИСЛ. ИЗ ВИД.

Разработка любого гидрогенного месторождения урана

При подземной разработке полезных ископаемых мето-



Fig. 1. In-situ leaching method and process operations

Цель исследования. Исследование механико-математической модели для расчета деформированного состояния кровли урановой камеры ПСВ проводится в условиях комплекса знакопеременных напряжений и деформаций, приводящих к перемещению и разрушению горных пород.

Методология

В практике ПСВ размыв камер ведется непрерывно вплоть до обрушения. Это позволяет определять не предельную по времени величину устойчивости кровли, а предельно допустимую величину пролета. При этом требования к запасу прочности кровли могут быть снижены [2].

Вмещающими породами при отработке залежей полезных ископаемых методом ПСВ являются толщи галечников, конгломератов, песчано-глинистых отложений и глин, обладающие упруго-пластическими свойствами с достаточно быстрым переходом от упругих деформаций к деформациям ползучести [3].

Зависимость между напряжениями и деформациями является линейной в зоне упругости (участок от 0 до X), следовательно, $G_x = E \epsilon_x$ (E – модуль Юнга, ϵ_x – деформация).

В пределах участка XY горная порода при увеличении нагрузки ведет еще себя как упругое тело (остаточной деформации не наблюдается). Точка Y есть предел упругости.

Частное от деления скорости изменения напряжения на скорость изменения деформации в любой точке отрезка XY есть модуль упругости ($\frac{dG_x}{d\epsilon_x}$).

При дальнейшем росте нагрузки (участок Y–X) в породе возникают остаточные деформации (порода переходит в стадию пластической деформации). Дальнейшее нарастание нагрузки вызывает пластическое течение в породе (на участке кривой t_∞ до точки β'). При дальнейшем росте нагрузки и достижении времени t_3 (точка β') порода разрушается [4–7].

При ПСВ урана в техногенных горных породах месторождений поведение кровли очистных камер будет проходить через все рассмотренные состояния вплоть до обрушения.

Схема к росту устойчивости обнажений кровли очистных камер ПСВ при секторном размыве рабочей жидкости приведена на рисунке 2 [8–11].

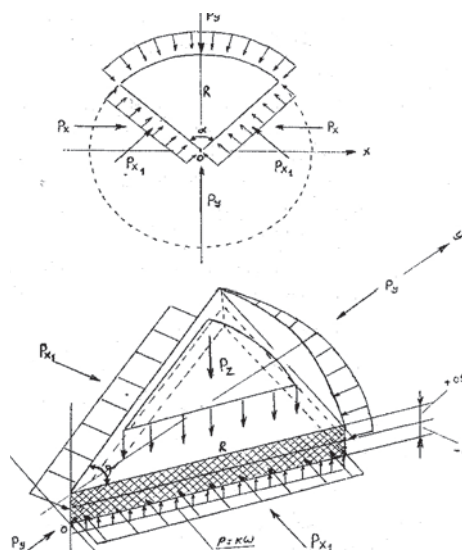


Рис. 2. Схема к расчету устойчивости кровли очистных камер подземного скважинного выщелачивания /
Fig. 2. Scheme for calculating the stability of the roof of the ISL treatment chambers

При разработке методики расчета предельно допустимого пролета обнажения кровли камер ПСВ за основу принято положение о совместности работы всех элементов камеры как единой совокупности взаимодействующих элементов. Исходя из этого принимается механико-математическая модель в виде секторной плиты площадью $S_{сек} = \frac{1}{360} \pi R^2 \alpha$, опирающейся по контуру на упругое основание (еще не размытый массив) и подверженной действию поперечной нагрузки $P_z = \frac{1}{360} \pi R^2 \alpha \gamma H$ и боковым усилиям P_{x_1}, P_y , где $P_{x_1} = P_x \sin \frac{\alpha}{2}$.

Результаты исследований

Как показали результаты экспериментов, выбранная модель позволяет для расчета напряженно-деформированного состояния кровли сектора очистной камеры использовать положение теории пластин.

При этом принимается, что деформирование кровли происходит в области 0Y до наступления пластической деформации, после наступления которой кровля практически теряет устойчивость и через определенное время разрушается.

Тогда для описания взаимосвязи реактивных усилий R упругое основания по контурам обнажения кровли и прогибов ω потолочины кровли будет справедлива гипотеза Винклера [12–14]:

$$P_{реак}(x,y) = K\omega(x,y), \quad (1)$$

где K – коэффициент постели (модуль) основания.

Коэффициент постели с учетом неравномерной деформации опорных целиков (массива) по контуру сектора получается в виде

$$K = \frac{E}{(1-2\mu)h} (\lambda_1 + \frac{1-2\mu}{1-\mu^2} \lambda_2), \quad (2)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; h – высота очистной камеры; λ_1 и λ_2 – отношение опорных площадей, работающих в объемном (у точки 0) и плоском напряженном состоянии (по сторонам сектора).

При определении изгиба потолочины (по оси X) полагаем, что плита на целики опирается шарнирно, тогда дифференциальное уравнение изогнутой поверхности потолочины кровли сектора в этих условиях принимает вид

$$D \nabla^2 \omega = P_z - K\omega \pm P_{x_1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \pm P_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad (3)$$

где D – жесткость плиты потолочины (в цилиндрических координатах) $D = Eh_n / 12 (1 - \mu^2)$,

h_n – толщина плиты;

∇^2 – оператор Лапласа ($\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \pm P_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$ – уравнение Лапласа);

ω – прогиб плиты потолочины; P_z – поперечная нагрузка на потолочину;

P_{x_1} и P_y – усилия в срединной плоскости плиты потолочины:

$$P_{x_1} = \int_{-0,5h_n}^{+0,5h_n} G_2 dz; \quad P_y = \int_{-0,5h_n}^{+0,5h_n} G_3 dz, \quad (4)$$

где G_2 и G_3 – горизонтальные напряжения в массиве горных пород.

Далее через полученный прогиб по известным условиям определяется напряжение в потолочине при изгибе.

Граничные условия устойчивости потолочины при длине R обнаженного пролета по оси X :

$$[G_{x_1}] \geq G_{x_1}; \quad [G_y] \geq G_y; \quad [G_z] \geq G_z. \quad (5)$$

Допустимый пролет $R_{\text{доп}}$ определяется условиями (4).

Нормальные напряжения в потолочине по плоскости контакта с опорами в зависимости от действующей нагрузки P_z , усилий P_{x_1} и P_y , радиуса размыва горной породы R и длины хорды ℓ сектора очистной камеры имеют вид

$$\begin{aligned} G_{x_1} &= AB \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{\ell^2} + \mu \frac{n^2}{R^2} \right); \\ G_y &= AB \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu \frac{m^2}{\ell^2} + \frac{n^2}{R^2} \right); \\ G_z &= \frac{P_z}{2} \left[1 - \frac{16}{\pi^2} B \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{\ell^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где m и n – целые положительные числа.

$$\begin{aligned} A &= \frac{96P_z}{\pi h_n^2}; \\ B &= \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left[\left(\frac{m^2}{\ell^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \pm \frac{1}{\pi^2 D} \left(P_{x_1} \frac{m^2}{\ell^2} + P_y \frac{n^2}{R^2} \right) + \frac{R}{\pi^4 D} \right]}. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценивая вероятность обрушения кровли камер ПСВ до окончания работ по извлечению полезного ископаемого, можно предположить, что разрушение не произойдет при вероятности e^{-KR^2} , где K – константа, зависящая от величины напряжений и свойств горной породы; R – радиус размыва камеры.

Вероятность того, что обрушение кровли не произойдет нигде по длине обнажения, можно записать в виде

$$Q = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \prod_{\ell=R}^{\ell=\infty} \left[\int_{\frac{R^2}{\ell^2}}^{\infty} \rho(s) ds \right]^{2\pi \ell \cdot \Delta \ell} \quad (8)$$

или

$$\ln Q = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 2\pi \ell \left[\ln \int_{\frac{R^2}{\ell^2}}^{\infty} \rho(s) ds \right] d\ell, \quad (9)$$

где ℓ – расстояние от оси потолочины;

$\tau \left(\frac{R}{\ell} \right)^2$ – касательное напряжение в точке на расстоянии ℓ от оси.

Предположим, что $\rho(s)$ – плотность вероятности, разлагается в степенной ряд, тогда $\ln Q$ можно записать в виде [14–16]:

$$\begin{aligned} \ln Q &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 2\pi \ell \left[\ln \int_{\frac{R^2}{\ell^2}}^{\infty} \sum R_i s^i ds \right] d\ell = \\ &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 2\pi \ell \ln \left[1 - \int_0^{\frac{R^2}{\ell^2}} \sum R_i s^i ds \right] d\ell = \\ &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 2\pi \ell \ln \left[1 - \sum R_i \rho^{i+1} \frac{R^{2i+2}}{\ell^{2i+2}} \right] d\ell. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $\ln(1-x)$ можно разложить в ряд:

$$-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots - \frac{1}{n}x^n,$$

где x – меньше единицы, то можно записать:

$$\begin{aligned} \ln Q &= - \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 2\pi \ell \sum \beta_i \rho^i \frac{R^{2i}}{\ell^{2i}} d\ell = \\ &= -2\pi \left[\sum \frac{\beta_i \rho^i R^{2i}}{(2i-2)\ell^{2i-2}} \right]_{R_{\min}}^{R_{\max}} = -2\pi AR^2; \\ Q &= e^{-2\pi AR^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где константа A является некоторой функцией R и коэффициентов разложения $\rho(s)$. Это показывает, что вероятность того, что кровля камеры радиуса размыва R не обрушится, равна e^{-KR^2} .

Выводы

Механико-математическая модель решения объемной задачи напряженно-деформированного состояния кровли очистной камеры ПСВ для определения допустимых пролетов обнажения кровли основана на положениях теории плит. Решение дифференциального уравнения, предложенного для описания изогнутой поверхности потолочины сектора очистной камеры, с использованием двойного тригонометрического ряда позволяет через полученный прогиб по принятым для кровли граничным условиям определить напряжения, возникающие в потолочине при изгибе и по ним устанавливать допустимый пролет обнажений кровли.

Приложение теории вероятностей к решению проблемы определения устойчивости (до разрушения) обнаженных пролетов кровли камер ПСВ дает возможность определить вероятность того, что разрушение кровли не произойдет. В этом случае вероятность должна быть равна e^{-kR^2} (k – константа, зависящая от величины напряжения и свойств породы; R – радиус размыва породы).

Выполненные расчеты параметров гидромониторных струй рабочей жидкости подтвердили правомерность полученных теоретических зависимостей о связи параметров размыва пород с параметрами давления на насадке гидромонитора, параметрами диаметра насадки и расстояния от насадки до забоя. В процессе гидротранспортирования отбитой горной массы по днищу очистной камеры ПСВ скорость трогания частиц, взвешивания и оседания связаны с глубиной и масштабом турбулентности потока воды в отбойной волне. Подъемная сила мелких частиц, переходящих во взвешенное состояние, пропорциональна квадрату скорости потока. Про-

изводительность гидротранспортирования пульпы от забоя к зумпфу зависит от параметров размыва горной массы и в пределах радиусов размыва $3,5 \leq R \leq 8$ м аппроксимируется прямопропорциональной зависимостью. Производитель-

ность эрлифтного подъема пульпы функционально связана с величиной погружения всасывающей линии эрлифта в зумпф, скоростью движения пульпы и потерями напора на всасывающей и нагнетательной линиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Авдохин В.М. Основы обогащения полезных ископаемых: учебник для вузов: в 2 томах. 2006; 1: 417. Avdokhin V.M. Fundamentals of Mineral Beneficiation. Textbook for Universities: In 2 Volumes. Moscow, 2006; 1: 417. (In Russ.).
2. Линч А. Дж. Циклы дробления и измельчения. Моделирование, оптимизация и управление. Москва, 1981: 343. Lynch A.J. Crushing and Grinding Cycles. Modeling, Optimization, and Control: Translated from English. Moscow, 1981: 343. (In Russ.).
3. Лазарева О.В., Подкаменный Ю.А. Автоматизированный способ управления комплексом измельчения и классификации алмазосодержащих руд. *Вестник ИргТУ*. 2014; 4: 128-133. Lazareva O.V., Podkamenny Yu.A. Automated Method for Controlling a Complex for Grinding and Classifying Diamond-Bearing Ores. *Vestnik of IrSTU*. 2014; 4: 128-133. (In Russ.).
4. King R.P. Modeling and simulation of mineral processing systems. Butterworth-Heinemann, 2001: 404.
5. Oryngozha Ye.Ye., Aitchanov B.H., Oryngozhin Ye.S., et al. Radiometric sorting of ore in uranium leaching. *Eurasian Mining*. 2025; 1: 91-94. URL: <https://www.rudmet.ru/journal/2425/article/39738/?language=en>
6. Oryngozha Ye.Ye., Aitchanov B.H., Oryngozhin Ye.S., et al. Geological aspects of uranium deposits for in-situ leaching application to develop energy potential of Kazakhstan. *Eurasian Mining*. 2024; 2: 19-22. URL: <https://www.rudmet.ru/journal/2364/article/38888>.
7. Цой С.В., Жусупбеков С.С. Основы разработки гидrogenных месторождений урана. Алматы, 2016: 320. Tsoi S.V., Zhushupbekov S.S. Fundamentals of Development of Hydrogenetic Uranium Deposits. Almaty, 2016: 320. (In Russ.).
8. Шемякин С.А., Шишкин Е.А. Физико-математическая модель разрушения горных пород зубом фрезерной установки. *Записки Горного института*. 2021; 251: 639-647. <https://doi.org/10.31897/PMI.2021.5.3>. Shemyakin S., Shishkin E. Physical and mathematical model of rock destruction by a milling machine cutter. *Journal of Mining Institute*. 2021; 251: 639-647. (In Russ.). <https://doi.org/10.31897/PMI.2021.5.3>.
9. Бабашева М.Н. Экспериментальное обоснование технологии водогазового воздействия на пласт в осложненных горно-геологических условиях. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Атырау: [б. и.], 2017. 24 с. Babasheva M.N. Experimental justification of water-gas stimulation technology in complex mining and geological conditions. Abstract of a dissertation for the degree of candidate of technical sciences. Atyrau: [b. i.], 2017. 24 p.
10. Вафин Р.В., Зарипов М.С., Алексеев Д.Л., Буторин О.И., Сагитов Д.К. Техно – технологические системы реализаций водогазового воздействия на пласты. *Нефтепромысловое дело*. 2014; 6: 55-68. Vafin R.V., Zaripov M.S., Alekseev D.L., Butorin O.I., Sagitov D.K. Technical and technological systems for implementing water-gas stimulation of formations. *Neftepromyslovoye delo*. 2014; 6: 55-6.
11. Узье О., Витур Д., Фьяр О. Анализ динамических потоков. Выпуск 5.10.01, 2018. 359 с. Uzier O., Vitura D., Fjare O. Dynamic Flow Analysis. Issue 5.10.01, 2018. 359 p.
12. Реферат «Причины коломатации призабойной зоны скважин при первичном вскрытии», Москва, 2010. Abstract "Causes of colmatation of the bottomhole zone of wells during primary opening", Moscow, 2010.
13. Капырин Ю.В., Таратын М.Э., Храпова Е.И. Способ вторичного вскрытия пласта. Патент РФ № 2160827, 20.12.2020. Kapyrin Yu.V., Taratyn M.E., Khrapova E.I. Method of secondary opening of a formation. Russian Federation Patent No. 2160827, 20.12.2020.
14. Kazatomprom. URL: <http://kazatomprom.kz/ru/pages/metod.pv>.
15. Щадов М.И., Артемьев В.Б. и др. Природный потенциал ископаемых углей. Рациональное использование их органического вещества. Москва, 2000; 2: 202. Shchadov M.I., Artemyev V.B., et al. Natural potential of fossil coals. Rational use of their organic matter. Moscow: Nedra, 2000; 2: 202. (In Russ.).
16. Шестаков В.А. Проектирование горных предприятий: учебник для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. Москва, 2003: 96 с. Shestakov V.A. Design of mining enterprises: Textbook for universities. 3rd ed., revised and enlarged. Moscow, 2003. 96 p. (In Russ.).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ерназ Советович Орынгожин –

д-р техн. наук, КазНУ им. Аль-Фараби, главный научный сотрудник ИГД им. Д.А. Кунаева, г. Алматы, Республика Казахстан

Ренат Асылбекович Юсубалиев –

соискатель, Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г. Алматы, Республика Казахстан; <https://orcid.org/0000-0001-8993-9986>

Махамбет Кудайбергенович Джексенов –

канд. географ. наук, Атырауский университет имени Х. Досмухамедова, г. Атырау, Республика Казахстан; <https://orcid.org/0000-0002-1741-3931>

ABOUT THE AUTHORS

Yernaz S. Oryngozhin –

Dr. Sci. (Eng.), Al-Farabi Kazakh National University, Chief Researcher at the Institute of Mining named after D.A. Kunaev, Almaty, Republic of Kazakhstan

Renat A. Yusubaliev -

Surveyor, National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Republic of Kazakhstan; <https://orcid.org/0000-0001-8993-9986>

Makhambet K. Djexenov -

Cand. Sci. (Geography), Atyrau university named after H. Dosmukhamedova, Atyrau, Republic of Kazakhstan; <https://orcid.org/0000-0002-1741-3931>

Ералы Ерназулы Орынгожа –

докторант PhD, Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева, г. Алматы, Республика Казахстан;
e-mail: e24.01@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-9130-0994>

Yeraly Ye. Oryngoza –

PhD doctoral student, Almaty University of Power Engineering and Telecommunications named after Gumarbek Daukeyev, Almaty, Republic of Kazakhstan;
e-mail: e24.01@mail.ru;
<https://orcid.org/0000-0002-9130-0994>

Наталья Александровна Милетенко – канд. техн.

наук, старший научный сотрудник Института проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова РАН, г. Москва, Российская Федерация;
<https://orcid.org/0000-0002-5594-3036>

Natalya A. Miletenko -

Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Institute of Comprehensive Exploitation of Mineral Resources named after academician N.V. Melnikov Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; <https://orcid.org/0000-0002-5594-3036>

Критерии авторства:

Авторы заявляют о равном вкладе каждого в работу над статьей.

Contribution:

The authors declare the equal contribution of everyone to the work on the article.

Конфликт интересов:

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest:

The authors declare no conflict of interest.

Информация о статье

Поступила в редакцию: 14.05.2026
Поступила после рецензирования: 29.05.26
Принята к публикации: 10.06.2026

Article info

Received: 14.05.2026
Revised: 29.05.26
Accepted: 10.06.2026